INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Curso de Termodinâmica-GFI 00210

2º semestre de 2016

Prof. Jürgen Stilck

Solução do exercício 3-8

a) Temos:

$$S = NA\left(\frac{V}{N}\right)^{1/2}\left(\frac{U}{N}\right)^{3/4} =$$
$$AN^{-1/4}V^{1/2}U^{3/4}.$$

Vamos, então, obter as equações de estado:

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} = \frac{3A}{4}(NU)^{-1/4}V^{1/2};$$

$$\frac{p}{T} = \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{A}{2}N^{-1/4}V^{-1/2}U^{3/4};$$
$$\frac{\mu}{T} = -\frac{\partial S}{\partial N} = \frac{A}{4}N^{-5/4}V^{1/2}U^{3/4}.$$

b) Nos processos adiabáticos quase-estáticos a entropia permanece constante. Vamos escrever a entropia como função de p e V. Dividindo a segunda equação de estado pela primeira, vem:

$$p = \frac{2}{3}\frac{U}{V},$$

logo:

$$U = \frac{3}{2}pV.$$

Substituindo a energia interna na expressão da entropia, obtemos:

$$S = AN^{-1/4}p^{3/4}V^{5/4}.$$

Como N permanece constante no processo adiabático, teremos, nesse caso:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial p}dp + \frac{\partial S}{\partial V}dV = 0,$$

o que leva a:

$$3p^{-1/4}V^{5/4}dp + 5p^{3/4}V^{1/4}dV = 0.$$

ou seja:

$$3\frac{dp}{p} = -5\frac{dV}{V}.$$

Integrando essa expressão entre os estados (V_1, p_1) e (V_2, p_2), teremos:

$$3\ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = 5\ln\left(\frac{V_1}{V_2}\right),$$

o que leva a $p_1V_1^{5/3} = p_2V_2^{5/3}$.

c) Invertendo a equação fundamental na representação da entropia, obtemos:

$$U = \left(\frac{S}{A}\right)^{4/3} N^{1/3}V^{-2/3}.$$

A energia livre de Helmholtz é dada pela transformada de Legendre:

$$F(T, V, N) = U - TS = \left(\frac{S}{A}\right)^{4/3} N^{1/3}V^{-2/3} - TS.$$

Devemos eliminar S nessa expressão. Para isso, lembramos que:

$$T = \frac{\partial U}{\partial S} = \frac{4}{3A^{4/3}}S^{1/3}N^{1/3}V^{-2/3},$$

o que pode ser invertido, resultando em:

$$S = \left(\frac{3}{4}\right)^3 A^{4/3}TN^{-1/3}V^{2/3}.$$

Substituindo a entropia na expressão da energia livre de Helmholtz, após alguma álgebra obtemos esse potencial nas suas variáveis naturais:

$$F(T, V, N) = -\frac{27}{256}(AT)^4V^2N^{-1}.$$